Matrice de Rotation en 2D

- **Lemme** : Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ repère orthonormé et $\overrightarrow{OM} = (a,b)$. Alors il existe deux vecteurs orthogonaux chacun à $\overrightarrow{OM}$ donnés par :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM'} = (-b, a) \\ \overrightarrow{OM''} = (b, -a) \end{cases}$$

Preuve : soit (D) et (D') deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\begin{cases} \overrightarrow{OM} = (a,b) \\ \overrightarrow{OM'} = (a', b') \end{cases}$

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = 0 \Rightarrow aa' + bb' = 0$$

- si $a \neq 0$ alors $a' = -\frac{b}{a} b'$. Donc $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} b' \\ b' \end{pmatrix} = 0$

Alors $b' \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

Prendre $b' \neq 0$. $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \end{pmatrix} = 0$. Multiplions par a

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}}_{\vec{v_1}} = 0$. On obtient $\vec{v_1} = (-b, a) \perp \overrightarrow{OM}$

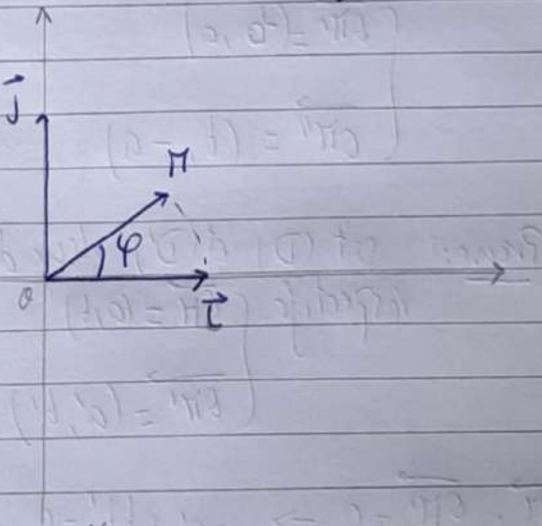
- si $b \neq 0$, on obtient $\vec{v_2} = (b, -a) \perp \overrightarrow{OM}$. cqfd

. **Théorème** : Soit $\vec{r} = r(O, \varphi)$ une rotation vectorielle de centre O d'angle φ.

Et $B_0 = [\vec{i}, \vec{j}]$.

Alors $M(\vec{r}, B_0) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

Preuve



Soit $M \in \mathbb{R}^2$ / $\vec{r}(\vec{i}) = \vec{OM}$

La rotation conserve la longueur alors $\vec{r}(\vec{i}) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$

. Comme $\vec{i} \perp \vec{j}$ alors $r(\vec{i}) \perp r(\vec{j})$

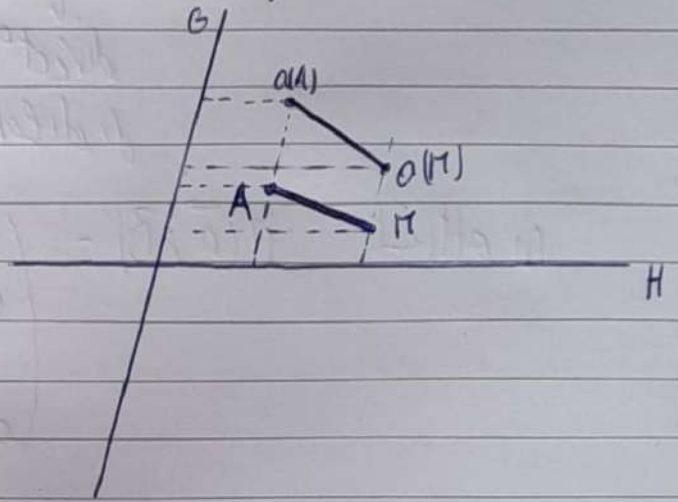
et $(\widehat{\vec{i}, \vec{j}}) = +\frac{\pi}{2}$ alors $\vec{r}(\vec{j}) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$

Alors $M(\vec{r}, B_0) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

Dilatation

• **Définition** Une dilatation est une affinité d'axe un hyperplan et de direction une droite vectorielle ou affine (appelée direction de dilatation)

Exemple Dans $\mathbb{R}^2$



$$\mathbb{R}^2 = H \oplus G \text{ et } \vec{a}(\underbrace{\vec{u_1}}_{H} + \underbrace{\vec{u_2}}_{G}) = \vec{u_1} + \lambda \vec{u_2}$$

$\lambda \in \mathbb{R}.$

On choisit ici G comme direct° de dilatation

$$\begin{cases} \vec{a}(\vec{i}) = \vec{a}(\vec{i} + 0\vec{j}) = \vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ a(\vec{j}) = a(0\vec{i} + \vec{j}) = \lambda \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$M(\vec{a}, B_c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Et $\lambda \in Sp(\vec{a})$

Dans $\mathbb{R}^n$, on peut choisir n'importe quel hyperplan et une direction vectorielle correspondante à ~~[illegible]~~ l'i-ème vecteur de base

Pour $B = \{\vec{u}_1, \ldots, \underbrace{\vec{u}_i}_{\substack{\downarrow \\ \text{direct}^{\circ} \\ \text{de dilatation}}}, \ldots, \vec{u}_n\}$ base de $\mathbb{R}^n$

on obtient $M(\vec{a}, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & 0 \\ \vdots & & \lambda & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} = (a_{ij})$

et $a_{ii} = \lambda$.